

PROBABILITÉS

Exercices

Exercice 1.

- (a) **Inégalité de Kolmogorov:** Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ des v.a. réelles dans L^2 , indépendantes telles que $\mathbb{E}(X_n) = 0$. pour tout n Posons $S_N = \sum_{n=1}^N X_n$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq n \leq N} |S_n| \geq \epsilon\right) < \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^N \text{Var}(X_n).$$

Indication: Pour $n \leq N$, poser $A_n = \{|S_n| \geq \epsilon \text{ mais } |S_m| < \epsilon \text{ pour tout } m < n\}$. Observer que $\{\max_{1 \leq n \leq N} |S_n| \geq \epsilon\} = \bigsqcup_{n=1}^N A_n$, que A_n est indépendant de $X_{n+1}, \dots, X_N$ et que

$$\mathbb{E}(S_N^2) \geq \sum_{n=1}^N \mathbb{E}(S_N^2 \mathbf{1}_{A_n}).$$

- (b) Supposons en plus que $\sum_{n \geq 1} \text{Var}(X_n) < \infty$. Montrer que S_N converge p.s.
Indication: En utilisant l'inégalité précédente pour $\max_{m \geq N} |S_m - S_N|$; montrer que la suite $(S_N)_{N \geq 1}$ est p.s. de Cauchy.

Exercice 2.

Soit X un v.a. réelle positive. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \int_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq t) dt \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^2) = \int_{t=0}^{\infty} 2t \mathbb{P}(X \geq t) dt. \quad (0.1)$$

Indication: utiliser la formule $\mathbb{E}(X^p) = \int_{u=0}^{\infty} u^p d\mu_X(u)$ ou μ_X est la loi de X .

Exercice 3 (Autre preuve de la LGN).

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ des v.a. à valeurs dans $[0, +\infty)$, deux à deux indépendantes, identiquement distribuées et dans L^1 . Notons $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ et $S_N = X_1 + \dots + X_N$. Le but est de montrer que $\frac{1}{N} S_N \rightarrow \mu$ p.s..

Posons, pour chaque $n \geq 1$, $Y_n = \min\{X_n, n\}$.

- (a) Montrer que, avec probabilité 1, il existe au plus un nombre fini de n tels que $Y_n \neq X_n$.

Indication: utiliser (0.1) et le lemme de Borel Cantelli.

- (b) Posons $T_N = Y_1 + \dots + Y_N$. Montrer que $\frac{1}{N} T_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} \mu$ si et seulement si $\frac{1}{N} S_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} \mu$.

Le but de reste de l'exercice est donc de montrer que $\frac{1}{N}T_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} \mu$.

(c) Soit $\alpha > 1$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\left(|T_{\lfloor \alpha^k \rfloor} - \mathbb{E}(T_{\lfloor \alpha^k \rfloor})| > \epsilon \alpha^k\right) \leq \frac{4}{(1 - \alpha^{-2})\epsilon^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(Y_m)}{m^2}.$$

Indication: utiliser l'inégalité de Tchebychev et un changement d'ordre de sommation.

(d) En utilisant (0.1) et le théorème de Fubini, montrer que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(Y_m)}{m^2} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_m^2)}{m^2} < \infty.$$

Indication: ca peut être utile d'observer que, pour $t > 1$, $\sum_{m \geq t} \frac{1}{m^2} \leq \int_{s=t-1}^{\infty} \frac{1}{s^2} ds = \frac{1}{t-1}$.

(e) Conclure que $\frac{1}{\alpha^k} T_{\lfloor \alpha^k \rfloor} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} \mu$.

(f) Dédire que $\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} T_N \leq \alpha \mu$ p.s. et $\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} T_N \leq \frac{1}{\alpha} \mu$ p.s..

Indication: Borner $\frac{1}{N} T_N$ en fonction de $\frac{1}{\alpha^k} T_{\lfloor \alpha^k \rfloor}$ et $\frac{1}{\alpha^{k+1}} T_{\lfloor \alpha^{k+1} \rfloor}$, ou $k = \lfloor \log_{\alpha} N \rfloor$.

(g) Conclure.

(h) En traitant séparément la partie positive et la partie négative, se débarrasser de l'hypothèse de positivité des X_n .

Notation: $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière de x . Remplacez $\lfloor \alpha^k \rfloor$ par simplement α^k pour alléger les notations.